集合論 (第 10 回) の解答

問題 10-1 の解答

$\mathrm{Card}(X) \le \mathrm{Card}(Y)$, $\mathrm{Card}(Y) \le \mathrm{Card}(Z)$ より, 単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ がある. このとき, $g \circ f : X \to Z$ も単射なので $\mathrm{Card}(X) \le \mathrm{Card}(Z)$.

□

問題 10-2 の解答

まず $a_1 \in X$ を取り, 次に $a_2 \in X \setminus \{a_1\}$, さらに $a_3 \in X \setminus \{a_1, a_2\}$ を取る. X は無限集合なので, この操作は無限に続けられる. このようにして, $a_i \in X$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ を選び,

$$X_0 = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

と置く. 作り方から a_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ は相異なるので, $f : \mathbb{N} \to X_0$ $(n \mapsto x_n)$ は全単射. 従って $\mathrm{Card}(X_0) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ を得る. $X_0 \subseteq X$ より

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(X_0) \le \mathrm{Card}(X)$$

□

問題 10-3 の解答

$[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ より $\mathrm{Card}([0, \infty)) \le \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. 逆に

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty) \ \ (t \to e^t)$$

は単射より $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \le \mathrm{Card}([0, \infty))$. ベルンシュタインの定理より $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([0, \infty))$.

□

問題 10-4 の解答

$X \subseteq Y$ より $\mathrm{Card}(X) \le \mathrm{Card}(Y)$. また $Y \subseteq Z$ と $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Z)$ より

$$\mathrm{Card}(Y) \le \mathrm{Card}(Z) = \mathrm{Card}(X)$$

ベルンシュタインの定理より $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

□

問題 10-5 の解答

$A \subseteq B$ より $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(B)$. 次に逆の不等式を示す. $(x, y) \in B$ に対して,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

に注意する. よって

$$f : B \to A \ ((x, y) \mapsto \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \ )$$

が定義できる. f は単射より $\mathrm{Card}(B) \le \mathrm{Card}(A)$. ベルンシュタインの定理から $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

□