集合論 (第10回)

10. 濃度の比較とベルンシュタインの定理

前回は集合の濃度について説明をしました. 集合 X から集合 Y に全単射があるとき, **X と Y の濃度は等しい**と言い, $X \sim Y$ で表しました. 例えば,

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}, \quad (0,1) \sim \mathbb{R}$$

などが成り立ちました. 今回も引き続き, 濃度の性質についてみていきます.

定義 10-1
空でない集合 X, Y を考える.

(1) $X \sim Y$ のとき, $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$ で表す. そうでないとき, $\mathrm{Card}(X) \neq \mathrm{Card}(Y)$ で表す.

(2) X から Y に単射が存在するとき, $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ で表す.

(3) $\mathrm{Card}(X) \neq \mathrm{Card}(Y)$, $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ のとき, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y)$ で表す.

※ Card は cardinality (濃度) の略です.

[補足] $X \subseteq Y$ なら, $X \to Y (a \mapsto a)$ は単射なので, $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$.

□

前回の例 9-1 から $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ だったので,

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Z})$$

また $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ より $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. 一方, 定理 9-3 から $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ なので,

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

問題 10-1 $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$, $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(Z)$ ならば, $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Z)$ を示せ.

問題 10-2 X が無限集合ならば, $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}(X)$ を示せ.

定理 10-1 (ベルンシュタインの定理)
空でない集合 X, Y に対して,

$$\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y),\ \mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X) \Rightarrow \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$$

※ つまり, X から Y, Y から X の両方に単射があれば, X から Y に全単射が存在すると言う主張です.

[証明]
文献 [1] 定理 7-2, 文献 [2] 定理 10-1 などを参考のこと.

□

X と Y の濃度が等しいことを示す際, X から Y に全単射を見つけるのが難しいことがあります. しかし, その場合でも, X から Y, Y から X への単射は比較的簡単に作れることがあります. このような状況では, ベルンシュタインの定理が役に立ちます.

例題 10-1
$\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$ を示せ.

[解答]
二つの写像

$$f : [0,1] \to (0,1)\ \left(x \mapsto \frac{x+1}{3}\right), \quad g : (0,1) \to [0,1]\ (x \mapsto x)$$

は共に単射. ベルンシュタインの定理から $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$.

□

問題 10-3 $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([0,\infty))$ を示せ.

例題 10-2
$\mathbb{Q}$ は可算集合であることを示せ.

[証明]
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ より $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Q})$. 逆に, 有理数

$$x = \frac{n}{m} \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m > 0,\ \gcd(m, n) = 1)$$

に対して, $g(x) = (n, m)$ とすると, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ は単射となる. よって

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$$

例 9-1 と問題 9-2 から

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}), \quad \mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$$

より

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$$

ベルンシュタインの定理より $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. 従って $\mathbb{Q}$ は可算集合.

□

例題 10-3
$\mathrm{Card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ を示せ.

[証明]
$I = (0, 1)$ と置く. $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(I)$ と定理 9-2 から

$$\mathrm{Card}(I \times I) = \mathrm{Card}(I)$$

を示せばよい. 写像

$$I \to I \times I \ (t \mapsto (t, t))$$

は単射より $\mathrm{Card}(I \times I) \leq \mathrm{Card}(I)$. 逆に $I \times I$ から I への写像を無限小数を用いて

$$I \times I \to I \ ((0.x_1x_2x_3\cdots, 0.y_1y_2y_3\cdots) \mapsto 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots)$$

で定めれば, これは単射. 従って $\mathrm{Card}(I \times I) \leq \mathrm{Card}(I)$. ベルンシュタインの定理から $\mathrm{Card}(I \times I) = \mathrm{Card}(I)$ を得る.

□

問題 10-4 $X \subseteq Y \subseteq Z$ で, $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Z)$ ならば, $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$ を示せ.

問題 10-5 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |x| < 1,\ |y| < 1\}$$

を考える. $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ を示せ.

参考文献

[1] 内田伏一, 集合と位相, 裳華房.

[2] 藤岡敦, 集合と位相, 裳華房.