集合論 (第 9 回) の解答

問題 9-1 の解答

(1) $f : \mathbb{N} \to Y$ $(n \to 1-n)$ は全単射. よって $\mathbb{N} \sim X$.

(2) $f : \mathbb{N} \to X$ を

$$f(n) = \begin{cases} 3k-2 & n = 2k \text{ のとき}, \\ \\ 3k-1 & n = 2k-1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定めれば, f は全単射. よって $\mathbb{N} \sim X$.

(3) $f : I \to \mathbb{R}$ $(t \to \log t)$ は全単射. よって $I \sim \mathbb{R}$.

□

問題 9-2 の解答

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $((m,n) \mapsto (2m-1)2^{n-1})$ が全単射を示す.

(i) 単射性. $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が $f(m_1, n_1) = f(m_2, n_2)$ を満たすとする.

$$(2m_1 - 1)2^{n_1 - 1} = (2m_2 - 1)2^{n_2 - 1} \qquad \text{(eq1)}$$

で, $2m_1 - 1, 2m_2 - 1$ は奇数より, $2^{n_1-1}, 2^{n_2-1}$ の 2 で割れる回数は等しい. よって $n_1 = n_2$. また (eq1) から $m_1 = m_2$. よって f は単射.

(ii) 全射性. $x \in \mathbb{N}$ とし,

$$x = y \times 2^z \quad (y \text{ は奇数}, z \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表す. ここで, $(m, n) = (\frac{y+1}{2}, z+1)$ と置くと,

$$f(m, n) = y \times 2^z = x$$

よって f は全射.

従って $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

□

問題 9-3 の解答

A が可算集合と仮定すると, 全単射 $f : \mathbb{N} \sim A$ が存在する. $f(k)$ $(k = 1, 2, ...)$ を整数 $x_{kj} \in \{0, 2\}$

を用いて次のように表す.

$$
\begin{array}{rcl}
f(1) & = & ({\color{red}x_{11}}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n}, ...) \\
f(2) & = & (x_{21}, {\color{red}x_{22}}, x_{23}, ...x_{2n}, ...) \\
f(3) & = & (x_{31}, x_{32}, {\color{red}x_{33}}, ..., x_{3n}, ...) \\
 & \vdots & \\
f(n) & = & (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ..., {\color{red}x_{nn}}, ...) \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

ここで,

$$
y_k = \begin{cases} 2 & x_{kk} = 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x_{kk} = 2 \text{ のとき} \end{cases}
$$

と置くと, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in A$ となる. $f : \mathbb{N} \to A$ は全射なので, $f(m) = y$ となる自然数 m が取れ,

$$
(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ..., x_{mm}, ...) = f(m) = y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_m, ...)
$$

特に $x_{mm} = y_m$. しかし, y_m の定義から x_{mm} と y_m は異なるので矛盾. よって A は非可算集合.

□