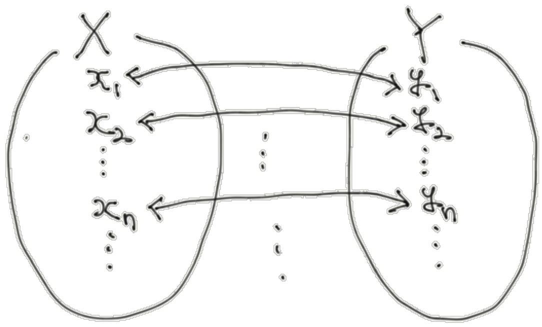
集合論 (第 9 回)

9. 集合の濃度とカントールの対角線論法

今回は集合の濃度について説明します.

定義 9-1 (濃度)
空でない集合 X, Y を考える. X から Y に全単射が存在するとき, $X \sim Y$ と表し, X **と** Y **の濃度は等しい**と言う. $X \sim Y$ でないとき, $X \not\sim Y$ で表す.

※ $X \sim Y$ なら, X から Y に全単射があるので, X の元と Y の元を 1 対 1 に対応づけることができます.



濃度の定義から有限集合の場合, 「濃度が等しい」ことは「要素の個数が等しい」ことと同値です.

定理 9-2
空でない有限集合 X, Y に対し, それぞれの要素の個数を $^{\#}X$, $^{\#}Y$ で表す. このとき,

$$^{\#}X = {}^{\#}Y \iff X \sim Y$$

次に無限集合の場合を考えます.

例 9-1

(1) X を奇数全体, Y を偶数全体とするとき, $X \sim Y$ となる.

(2) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{R}$ の開区間 $I = (0,1)$ と $J = (0,\infty)$ に対して, $I \sim J$ となる.

(4) $\mathbb{R}$ の開区間 $K = (a,b)$ $(a < b)$ に対して, $(0,1) \sim K$ となる.

[証明]

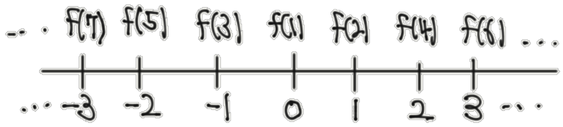
「$X \sim Y$」を示すには, 全単射 $f : X \to Y$ を見つければよいです. 下記では全単射の例を挙げておきます. それぞれの f が全単射であることの証明は各自で考えてみてください.

(1) $f : X \to Y$ $(n \to n+1)$ は全単射. よって $X \sim Y$ となる.

(2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ が偶数のとき}, \\ \frac{1-n}{2} & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

で定めると, f は全単射. よって $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ となる.



(3) $f : I \to J$ $(t \to \frac{1}{t} - 1)$ は全単射. よって $I \sim J$ となる.

(4) $f : (0,1) \to K$ $(t \to (b-a)t + a)$ は全単射. よって $(0,1) \sim K$ となる.

□

問題 9-1

(1) X を 0 以下の整数全体とするとき, $\mathbb{N} \sim X$ を示せ.

(2) X を 3 で割れない自然数全体とするとき, $\mathbb{N} \sim X$ を示せ.

(3) $\mathbb{R}$ の開区間 $I = (0,\infty)$ に対して, $I \sim \mathbb{R}$ を示せ.

問題 9-2 写像

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ ((m, n) \mapsto (2m-1)2^{n-1})$$

が全単射を示すことで, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ を示せ.

次に濃度の基本的な性質を二つ確認しておきます.

定理 9-1

空でない集合 X, Y, Z を考える.

(1) $X \sim X$.

(2) $X \sim Y$ ならば, $Y \sim X$.

(3) $X \sim Y$, $Y \sim Z$ ならば, $X \sim Z$.

[証明]

(1) 恒等写像 $I : X \to X$ は全単射より $X \sim X$.

(2) $X \sim Y$ のとき, 全単射 $f : X \to Y$ が存在する. このとき, 逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も全単射なので $Y \sim X$.

(3) $X \sim Y$, $Y \sim Z$ のとき, 全単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が存在する. このとき, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全単射なので $X \sim Z$.

□

定理 9-1 の使い方をみておきます. 例 9-1 (3) と問題 9-1 (3) から, $(0,1) \sim (0,\infty)$ と $(0,\infty) \sim \mathbb{R}$. よって, 定理 9-1 (3) より $(0,1) \sim \mathbb{R}$ が分かります.

定理 9-2

空でない集合 X_1, X_2, Y_1, Y_2 に対して, 次が成り立つ.

$$X_1 \sim X_2,\ Y_1 \sim Y_2 \Rightarrow X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2$$

[証明]

$X_1 \sim X_2$, $Y_1 \sim Y_2$ より, 全単射 $f : X_1 \to X_2$ と $g : Y_1 \to Y_2$ が存在する. このとき,

$$h : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2 \ ((x, y) \mapsto (f(x), g(y)))$$

は全単射. よって $X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2$ を得る.

□

例えば, $(0,1) \sim \mathbb{R}$ なので, 定理 9-2 から $(0,1) \times (0,1) \sim \mathbb{R}^2$ が成り立ちます.

定義 9-2 (可算集合)
空でない集合 X を考える.

(1) $\mathbb{N} \sim X$ のとき, X は**可算集合**と言う.

(2) X が有限集合または可算集合であるとき, X は**高々可算である**と言う.

(3) X が有限集合でも, 可算集合でもないとき, X は**非可算集合**と言う.

※ X が可算集合なら, 全単射 $f : \mathbb{N} \to X$ があるので, $x_i = f(i)$ $(i = 1, 2, ...)$ と置くと,

$$X = \{x_i \mid i = 1, 2, ...\}$$

とできます. つまり, X の元を自然数で番号づけすることができます.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ などは可算集合になります. 一方, $\mathbb{R}$ は非可算集合になります.

定理 9-3
$\mathbb{R}$ は非可算集合である.

[証明]
$\mathbb{R}$ が可算集合と仮定する. このとき, $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \sim (0,1)$ より, $\mathbb{N} \sim (0,1)$ となる. 従って, 全単射 $f : \mathbb{N} \sim (0,1)$ が存在する. ここで, $f(k)$ $(k = 1, 2, ...)$ を 10 進法の無限小数で表す (下の補足を参照).

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots x_{1n}\cdots \\
f(2) &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots x_{2n}\cdots \\
f(3) &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots x_{3n}\cdots \\
&\vdots \\
f(n) &= 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

対角線部分の x_{kk} $(k = 1, 2, ...)$ に着目し, 自然数 k に対して,

$$y_k = \begin{cases} 1 & x_{kk} \text{ が偶数のとき,} \\ 2 & x_{kk} \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

と置く．このとき, $y = 0.y_1y_2y_3\cdots y_n\cdots \in (0,1)$ となる．$f : \mathbb{N} \to (0,1)$ は全射なので, $f(m) = y$ となる自然数 m が取れ,

$$0.x_{m1}x_{m2}x_{m3}\cdots x_{mm}\cdots = f(m) = y = 0.y_1y_2y_3\cdots y_m\cdots$$

特に $x_{mm} = y_m$. しかし, y_m の定義から, x_{mm} と y_m の偶奇は異なるので矛盾. よって $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

□

[補足]

(1) 上のような証明方法をカントールの対角線論法と言う.

(2) 有限小数は無限小数での表し方が 2 通りあることに注意. 例えば, $x = 0.15$ だと,

$$0.15 = 0.150000000\cdots = 0.149999999\cdots$$

上の証明では, 後者 (後に 9 が並ぶもの) を考えているものとする.

問題 9-3 集合 $A_n = \{0, 2\}$ に対して,

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

を考える. 定理 9-3 の証明を参考に A が非可算集合であることを示せ.