線形代数 (第 24 回)

24 固有値と固有ベクトル

次回, 行列や線形写像を調べる上で重要となる「対角化」について紹介をします. 今回は対角化の手順として不可欠な固有値・固有ベクトルについて学びます.

24-1 行列の固有値・固有ベクトル

定義 24-1

n 次正方行列 A に対し,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ ただし } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

を満たす実数 λ を A の**固有値**, $\boldsymbol{x}$ を (固有値 λ に属する) A の**固有ベクトル**と呼ぶ.

例で定義を確認しておきます.

例題 24-1

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ について, 次のベクトルが A の固有ベクトルかどうか答えよ.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10\boldsymbol{x}_1$$

より, $\boldsymbol{x}_1$ は固有値 10 に属する A の固有ベクトルである.

$$A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \end{bmatrix}$$

より, $\boldsymbol{x}_2$ は A の固有ベクトルではない.

$\square$

今の例題は, 与えられたベクトルが A の固有ベクトルか否かを答える問いでした. しかし, 実際は,

A の固有値 · 固有ベクトルを自分で求める

必要があります. 以下では, その手順を説明します.

STEP 1　**A の固有多項式を求める**

定義 24-2
変数 t についての多項式 $\det(tE - A)$ を A の**固有多項式** (または特性多項式) と呼び, $g_A(t)$ で表す. ただし, E は単位行列とする.

例えば, $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$\begin{aligned} g_A(t) &= \det(tE - A) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) \end{aligned}$$

STEP 2　**固有値をすべて求める**

定理 24-2
実数 λ と n 次正方行列 A に対して次が成り立つ.

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \iff g_A(\lambda) = 0$$

[証明]

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } A \text{ の固有値} &\iff A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \text{ をみたす } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \text{ が存在する} \\ &\iff (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ をみたす } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \text{ が存在する} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{定理 7-2}}{\iff} \operatorname{rank}(\lambda E - A) < n$$

$$\overset{\text{定理 8-3}}{\iff} \lambda E - A \text{ は正則行列ではない}$$

$$\overset{\text{定理 13-3}}{\iff} g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$$

□

定理 24-2 から A の固有値を求めるには,

A の固有多項式の根を求めればよい！

例えば, STEP1 の A について, $g_A(t) = (t-1)(t-4)$ だったので, A の固有値は 1 と 4.

STEP 3　各固有値に属する固有ベクトルを求める

定義 24-3
　n 次正方行列 A の固有値 λ に対し,

$$W(\lambda; A) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \right\}$$

を A の固有値 λ の**固有空間**と呼ぶ.

　$W(\lambda; A)$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトルの集合に零ベクトル $\mathbf{0}$ を付け加えた集合であり, $\mathbb{R}^n$ の部分空間になります. よって

固有ベクトルを求めるには, 固有空間 $W(\lambda; A)$ の基底を求めればよい！

例えば, STEP1 の A について, 固有値 1 に関する固有空間を計算してみます.

$$\begin{aligned} W(1; A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(1; A)$ の基底です.

例題 24-2

行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値 λ の固有空間 $W(\lambda; A)$ とその 1 組の基底を求めよ.

[解答]

(1) A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{vmatrix} = (t-3)(t+2)$$

(2) (1) より, A の固有値は $\lambda = 3,\ -2$.

(3) 固有値 3 の固有空間は

$$W(3; A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 2y \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(3; A)$ の基底である.

固有値 -2 の固有空間は

$$\begin{aligned}
W(-2;A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\} \\
&= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(-2;A)$ の基底である.

$\square$

問題 24-1 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値 λ の固有空間 $W(\lambda;A)$ とその 1 組の基底を求めよ.

問題 24-2 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値 λ の固有空間 $W(\lambda;A)$ とその 1 組の基底を求めよ.

24-2 線形変換の固有値 · 固有ベクトル

前節では行列の固有値 · 固有ベクトルを学びました. この節では, 線形変換の固有値 · 固有ベクトルについて考えます.

定義 24-4

ベクトル空間 V の線形変換 T について,

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{u} \in V,\ \text{ただし } \boldsymbol{u} \neq \mathbb{O})$$

を満たす実数 λ を T の**固有値**, $\boldsymbol{u}$ を (固有値 λ に属する) T の**固有ベクトル**と呼ぶ. また

$$W(\lambda; T) := \left\{\boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}\right\}$$

とし, T の固有値 λ の**固有空間**と言う.

線形変換 T の固有値 · 固有ベクトルは次の手順で求まります.

STEP 1　**V の 1 組の基底をとって, T の表現行列 A を求める**

この部分は第 23 回で学んだ作業です.

STEP 2　**T の固有多項式を求める**

STEP 1 の A の固有多項式 $g_A(t)$ を T の**固有多項式**といい, $g_T(t)$ と書きます. つまり,

$$g_T(t) = g_A(t) = \det(tE - A)$$

T の固有多項式は, STEP 1 での基底の取り方に依らず同じになります (問題 24-4).

STEP 3　**T の固有値を求める**

行列の場合と同様, 次が成り立ちます.

$$\lambda \text{ が } T \text{ の固有値} \iff \lambda \text{ が } g_T(t) = 0 \text{ の解}$$

このことから, T の固有値を求められます.

STEP 4　**各固有値の固有空間を求める**

STEP 3 の各固有値に対して固有空間を求めます.

例題 24-3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とし, $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する.

(1) T の固有多項式 $g_T(t)$ を求めよ.

(2) T の固有値 λ を求めよ.

(3) T の各固有値 λ に対して, 固有空間 $W(\lambda;T)$ とその 1 組の基底を求めよ.

[解答]

(1) 標準基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ （第 23 回の資料を参照.)

よって

$$g_T(t) = g_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

(2) (1) より T の固有値は $\lambda = 3,\ -1$.

(3)

(i) 固有値 3 の固有空間は

$$\begin{aligned} W(3;T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x = y \right\} \\ &= \left\{ y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ \middle|\ y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(3;T)$ の基底である.

(ii) 固有値 -1 の固有空間は

$$\begin{aligned} W(-1;T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; y = -x \right\} \\ &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(-1;T)$ の基底である.

□

例題 24-4

$\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T を $T(f(x)) = f'(x) + f(0)$ で定義する.

(1) T の固有多項式 $g_T(t)$ を求めよ.
(2) T の固有値 λ を求めよ.
(3) T の各固有値 λ の固有空間を求めよ.

[解答]

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して,

$$\big(T(1), T(x), T(x^2)\big) = (1, 1, 2x) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

従って

$$g_T(t) = g_A(t) = \det(tE - A)$$
$$= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} \overset{サラス}{=} (t-1)t^2$$

(2) (1) より T の固有値は $\lambda = 0, 1$.

(3) 次に注意する.

$$a + bx + cx^2 \text{ が } T \text{ の } \lambda \text{ に属する固有ベクトル} \iff \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ が } A \text{ の固有値 } \lambda \text{ に属する固有ベクトル}$$

(i) A の固有値 1 の固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b = c = 0 \right\}$$
$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

よって

$$W(1;T) = \{a \cdot 1 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

また $\{1\}$ は $W(1;T)$ の基底である.

(ii) A の固有値 0 の固有空間は

$$W(0;A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a = -b,\ c = 0 \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

よって

$$W(0;T) = \{a(1-x) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

また $\{1-x\}$ は $W(0;T)$ の基底である.

$\square$

問題 24-3 $\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T を $T(f(x)) = xf'(1) + f(x)$ で定義する.

(1) T の固有値 λ を求めよ.
(2) T の各固有値 λ の固有空間 $W(\lambda;T)$ とその 1 組の基底を求めよ.

問題 24-4 n 次元ベクトル空間 V の線形変換 T を考える. 基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ と $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ に関する T の表現行列をそれぞれ A, B で表す. また $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ と $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ の基底変換行列 P を取る. つまり,

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)P = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n)$$

このとき, 次を示せ.

(1) B を A を用いて表せ.
(2) $g_A(t) = g_B(t)$ を示せ.

このことから, T の固有多項式は基底の取り方に依らないことが分かる.