線形代数 (第24回) の解答

問題 24-1 の解答

(1) A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-4)$$

よって A の固有値は $\lambda = 1, 4.$

(2)

(i) 固有値 1 の固有空間は

$$\begin{aligned}
W(1;A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\} \\
&= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(1;A)$ の基底である.

(ii) 固有値 4 の固有空間は

$$\begin{aligned}
W(4;A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = -2y \right\} \\
&= \left\{ x \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

また $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ は $W(4;A)$ の基底である.

問題 24-2 の解答

(1) A の固有多項式は

$$\begin{aligned}
g_A(t) &= |tE-A| \\
&= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 2 \\ 1 & t-3 & 2 \\ -2 & 2 & t-6 \end{vmatrix} \\
&= (t-1)(t-3)(t-6) + (-1)\cdot 2\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 2 \\
&\qquad\qquad - (t-1)\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot(t-6) - 2\cdot(t-3)\cdot(-2) \\
&= t^3 - 10t^2 + 28t - 24 = (t-2)^2(t-6)
\end{aligned}$$

よって, A の固有値は $\lambda = 2,\ 6$.

(2)

(i) 固有値 2 の固有空間は

$$\begin{aligned}
W(2;A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y - 2z \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

また $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{O}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{bmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より $c_1 = c_2 = 0$. 従って $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は 1 次独立. 以上より $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $W(2; A)$ の基底である.

(ii) 固有値 6 の固有空間は

$$\begin{aligned}
W(6; A) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y,\ z = -2y \right\} \\
&= \left\{ y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

また $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ は $W(6; A)$ の基底である.

問題 24-3 の解答

(1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して,

$$\big(T(1), T(x), T(x^2)\big) = (1, 2x, 2x + x^2) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

従って

$$
\begin{aligned}
g_T(t) &= \det(tE - A) \\
&= \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} (t-1)^2(t-2)
\end{aligned}
$$

よって T の固有値は $\lambda = 1, 2.$

(2)

(i) A の固有値 1 の固有空間は

$$
\begin{aligned}
W(1; A) &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b + 2c = 0 \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

よって

$$
W(1; T) = \left\{ a \cdot 1 + c \cdot (-2x + x^2) \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}
$$

また $a \cdot 1 + c \cdot (-2x + x^2) = 0$ $(a, c \in \mathbb{R})$ とすると,

$$
a \cdot 1 + (-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0
$$

より $a = c = 0.$ よって, $\{1, -2x + x^2\}$ は 1 次独立より, $W(1; T)$ の基底になる.

(ii) A の固有値 2 の固有空間は

$$
\begin{aligned}
W(2;A) &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a = c = 0 \right\} \\
&= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

よって,

$$W(2;T) = \{ b \cdot x \mid b \in \mathbb{R} \}$$

また $\{x\}$ は $W(2;T)$ の基底となる.

問題 24-4 の解答

(1) 定理 23-2 より, $B = P^{-1}AP$.

(2)

$$
\begin{aligned}
g_B(t) &= |tE - B| = |tP^{-1}EP - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(tE - A)P| = |P|^{-1}|tE - A||P| = |tE - A| = g_A(t)
\end{aligned}
$$