線形代数 (第 25 回)

25 行列の対角化

前回は固有値, 固有ベクトル, 固有空間について定義し, それらの計算方法を確認しました. 今回はそれらを用いて行列を対角化する方法について学びます.

25-1 行列の対角化

定義 25-1
正方行列 A を**対角化する**とは, 正則行列 P をうまく選んで $P^{-1}AP$ を対角行列にすることを言う.

例えば, $A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ に対して, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を選ぶと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となり, A は対角化できます.

次に上の P の見つけ方を説明します. A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{vmatrix} = (t-3)(t+2)$$

より, A の固有値は 3 と -2. それぞれの固有空間は

$$W(3; A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(-2; A) = \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

(固有空間の計算方法は第 24 回の資料を参照). 固有空間の基底として, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を取ると, 固有ベクトルの定義から

$$A\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_1, \qquad A\boldsymbol{x}_2 = -2\boldsymbol{x}_2 \qquad \cdots ①$$

ここで, 固有ベクトルの基底を並べてできる行列

$$P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を考えます．このとき, P は正則行列で, また①から

$$AP = A[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2] = [A\boldsymbol{x}_1\ A\boldsymbol{x}_2] = [3\boldsymbol{x}_1\ \ -2\boldsymbol{x}_2] = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} \cdots ②$$

従って

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

を得ます．つまり,

固有空間の基底を並べてできる行列を P とすると $P^{-1}AP$ は固有値が並ぶ！

行列 P で並べる固有ベクトルの順番と $P^{-1}AP$ の対角成分に現れる固有値の順番は対応しています．$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1$ の順で固有ベクトルを並べると, $P = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ であり,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

[注意 1] 行列 P の定め方から, $P^{-1}AP$ の形 (固有値が並ぶ対角行列) は分かっているので, P^{-1} や $P^{-1}AP$ の計算は必要ありません．

[注意 2] 正方行列 A はいつでも対角化できるわけではありません．対角化できる条件については次節で紹介します．

例題 25-1

行列 $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ を対角化せよ．

[解答] A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix}t-2 & -1\\ -3 & t-4\end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$$

なので, A の固有値は 1 と 5．それぞれの固有空間は

$$W(1; A) = \left\{ x\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W(5; A) = \left\{ x\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

ここで, 固有空間の基底を並べてできる行列を

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

と置くと, P は正則行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(こうなる理由は②と同じ) $\square$

[注意] $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ と置いた場合は $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となり, こちらも正解です.

問題 25-1 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

例題 25-2

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

[解答]
A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 2 \\ 1 & t-3 & 2 \\ -2 & 2 & t-6 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-6)$$

より, A の固有値は 2, 6. それぞれの固有空間は

$$W(2;A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad W(6;A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

と置けば, P は正則行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\square$

25-2 対角化できる行列の条件

ここでは, 正方行列が対角化できる条件について紹介します. まずは, 対角化できない例を挙げておきます. 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 3 \\ -3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)^2$$

より, A の固有値は 2 のみです. この固有空間は

$$W(2; A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

となりますが, 基底の個数が 1 個だけなので, A を対角化する正則行列 P を作れません.

行列の対角化に関して次の定理が知られています.

定理 25-1 (文献 [1] 定理 5.4.2)
A を n 次正方行列とし, A の相異なる固有値のすべてを $\lambda_1, ..., \lambda_r$ とする. このとき,

$$A \text{ は対角化可能} \iff \sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; A)) = n$$

要するに,

A の固有空間の基底として全部で n 本のベクトルが揃わなければ対角化できない！

と言うことです.

[補足] 定理 25-1 で A は対角化可能とする. このとき, 各固有空間 $W(\lambda_i; A)$ の次元を k_i, 基底を $\{\boldsymbol{x}_{i1}, ..., \boldsymbol{x}_{ik_i}\}$ とする. このとき, 行列

$$P = [\boldsymbol{x}_{11}, ..., \boldsymbol{x}_{1k_1}, ..., \boldsymbol{x}_{r1}, ..., \boldsymbol{x}_{rk_r}]$$

は正則行列で, さらに

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \text{O} & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & \text{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

上の対角行列において, 各 λ_i は k_i 個現れる.

定理 25-1 の使い方を確認しておきます. 先ほどの $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ を考えると,

$$\dim(W(2; A)) = 1 \neq 2$$

よって, 定理 25-1 から A は対角化できないことが分かります.

例題 25-2

次の行列が対角化可能かどうか答えよ. 対角化できる場合は対角化せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ 1 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3)$$

より, A の固有値は $1, 2, 3$. それぞれの固有空間は

$$W(1; A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(2; A) = \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(3; A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．よって

$$\sum_{i=1}^{3}\dim(W(\lambda_i;A)) = \dim(W(1;A)) + \dim(W(2;A)) + \dim(W(3;A)) = 1+1+1 = 3$$

よって A は対角化できる．また

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と置くと

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

B の固有多項式 $g_B(t)$ は

$$g_B(t) = \det(tE - B) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)$$

より, B の固有値は 1, 2. それぞれの固有空間は

$$W(1;B) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(2;B) = \left\{ b \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．従って,

$$\sum_{i=1}^{2}\dim(W(\lambda_i;B)) = \dim(W(1;B)) + \dim(W(2;B)) = 1+1 \neq 3$$

よって B は対角化できない．

□

問題 25-2 次の行列が対角化可能かどうか判定せよ．対角化できる場合は対角化せよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.