線形代数 (第 25 回) の解答

問題 25-1 の解答

A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)$$

よって A の固有値は 1, 2. それぞれの固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W(2;A) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

固有空間の基底を並べてできる行列を

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

と置くと, P は正則行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

問題 25-2 の解答

A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 2 \\ -2 & t-3 & 2 \\ 2 & 2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-7)$$

よって, A の固有値は $\lambda = 1, 7$. それぞれの固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} \qquad W(7;A) = \left\{ z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. よって

$$\sum_{i=1}^{2} \dim(W(\lambda_i; A)) = \dim(W(1;A)) + \dim(W(7;A)) = 2 + 1 = 3$$

よって, 定理 25-1 から A は対角化できる. また

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と置くと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

B の固有多項式 $g_B(t)$ は

$$g_B(t) = |tE - B| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)$$

よって B の固有値は $\lambda = 1, 2$. それぞれの固有空間は

$$W(1;B) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W(2;B) = \left\{ y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．よって

$$\sum_{i=1}^{2} \dim(W(\lambda_i;B)) = \dim(W(1;B)) + \dim(W(2;B)) = 1 + 1 \neq 3$$

よって定理 25-1 から B は対角化できない.