線形代数 (第 26 回)

26 行列の対角化の応用

前回は行列の対角化について解説しました．行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P があるとき，A は対角化可能と言い，このような P は A の固有ベクトルを用いて作ることができました．今回は，行列の対角化を用いて，行列の累乗を計算する方法を説明します．また後半では，数列の漸化式への応用についてみます．

A^n の計算方法

正方行列 A が正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = U, \quad U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

と対角化できたとします．このとき，$A = PUP^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned} A^n &= \overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A \cdot A}^{n\ \text{個}} \\ &= (PUP^{-1}) \cdot (PUP^{-1}) \cdot \cdots \cdot (PUP^{-1}) \cdot (PUP^{-1}) \\ &= PU^nP^{-1} \qquad (\because P^{-1}P = E\ (\text{単位行列})) \end{aligned}$$

ここで，

$$U^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^n \end{bmatrix}$$

より

$$A^n = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

この右辺を計算することで A^n を求められます．

例題 26-1

$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

[解答]

A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-5 & 6 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)$$

よって A の固有値は 2, 3. それぞれの固有空間は

$$W(2; A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(3; A) = \left\{ b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

よって $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと, 前回の議論から

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(第 25 回目を参照). 従って

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^n \\ &= P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

例題 26-2

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

[解答]

A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)$$

より, A の固有値は 1, 2. それぞれの固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(2;A) = \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき,

$$\dim(W(1;A)) + \dim(W(2;A)) = 2 + 1 = 3$$

定理 25-1 から A は対角化できる. 固有ベクトルを並べてできる行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える. このとき,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(逆行列の計算は第 8 回目を参照) であり,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

よって

$$A^n = \left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-1 & 0 & 2-2^{n+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n-1 & 0 & 2-2^n \end{bmatrix}$$

□

問題 26-1 $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

問題 26-2 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ のとき, A^n を求めよ.

数列の漸化式への応用

行列の累乗の計算は数列の漸化式に応用できます.

例題 26-3

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}\ (n \geqq 3)$$

で定義するとき, 一般項 a_n を求めよ.

[解答]

$n \geqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix} \\
&\ \ \vdots \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

例題 26-1 より

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} = \begin{bmatrix} -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \\ -2^{n-2} + 3^{n-2} & 3 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

また条件より $\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるので

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \\ -2^{n-2} + 3^{n-2} & 3 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2^{n-1} + 3^{n-1} \\ -2^{n-2} + 3^{n-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

よって, 一般項は $a_n = -2^{n-1} + 3^{n-1}$. これは $n = 1, 2$ のときも成立.

$\square$

[コメント] 行列の対角化は, 数列の漸化式の他にも, 微分方程式や二次曲線・曲面など多種多様な場面で応用されます.

問題 26-3 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次で定義する.

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 3b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 4b_n \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次を満たす行列 A を求めよ.

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (n \geqq 1)$$

(2) A を対角化せよ.

(3) $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.