線形代数 (第 26 回) の解答

問題 26-1 の解答

A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-4)$$

より, A の固有値は $1, 4$. それぞれの固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(4;A) = \left\{ y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と置くと, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ であり,

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^n \\ &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 2 \cdot 4^n & 2 - 2 \cdot 4^n \\ -1 + 4^n & 2 - 4^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

問題 26-2 の解答

A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 2 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3)$$

より, A の固有値は $1, 2, 3$. それぞれの固有空間は

$$W(1;A) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(2;A) = \left\{ y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W(3;A) = \left\{ z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき,

$$\dim(W(1;A)) + \dim(W(2;A)) + \dim(W(3;A)) = 1 + 1 + 1 = 3$$

よって定理 25-1 から A は対角化できる. 行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考えると,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

よって

$$A^n = \left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} -2^n + 2 & 2^n - 1 & 0 \\ -2^{n+1} + 2 & 2^{n+1} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

□

問題 26-3 の解答

(1)

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a_n - 3b_n \\ 6a_n - 4b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

よって $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$.

(2) A の固有多項式は

$$g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-5 & 3 \\ -6 & t+4 \end{vmatrix} = (t-2)(t+1)$$

よって A の固有値は 2, -1. それぞれの固有空間は

$$W(2;A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(-1;A) = \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

よって $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と置くと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

一方, (2) より

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= \left(P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^{n-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{n-1} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n + (-1)^n & -2^{n-1} + (-1)^{n-1} \\ 2^n + 2 \cdot (-1)^n & -2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n + (-1)^n & -2^{n-1} + (-1)^{n-1} \\ 2^n + 2 \cdot (-1)^n & -2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n + (-1)^n \\ 2^n + 2 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$$

よって一般項は

$$a_n = 2^n + (-1)^n, \quad b_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$$

これは $n = 1$ のときも正しい.

$\square$