線形代数 (第 13 回)

13 余因子展開と余因子行列

今回は余因子展開と余因子行列の説明をします. また, 余因子行列と逆行列の関係についても触れます.

定義 13-1

n 次正方行列 A から第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と表す.

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ について.

- A_{12} は A から第 1 行と第 2 列を取り除いてできる 2 次正方行列なので

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ 4 & \cancel{-3} & 0 \\ 2 & \cancel{6} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- A_{22} は A から第 2 行と第 2 列を取り除いてできる 2 次正方行列なので

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & -2 \\ \cancel{4} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ 2 & \cancel{6} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- A_{31} は A から第 3 行と第 1 列を取り除いてできる 2 次正方行列なので

$$A_{31} = \begin{bmatrix} \cancel{3} & 1 & -2 \\ \cancel{4} & -3 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 13-2
正方行列 A に対して

$$a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

と置き, これを A の**第 (i,j) 余因子**と呼ぶ.

余因子の計算方法を確認しておきます.

例題 13-1

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ に対して, 第 $(1,1)$ 余因子 a_{11}^*, 第 $(2,1)$ 余因子 a_{21}^*, 第 $(3,2)$ 余因子 a_{32}^* を求めよ.

[解答]

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$a_{32}^* = (-1)^{3+2} \det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

$\square$

前回は基本変形を用いて行列式を計算しましたが, 別の方法として以下の余因子展開があります.

定理 13-1

n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ について次が成立する.

(1)（**第 j 列に関する余因子展開**）

$$\det(A) = a_{1j} \cdot a_{1j}^* + a_{2j} \cdot a_{2j}^* + \cdots + a_{nj} \cdot a_{nj}^*.$$

(2)（**第 i 行に関する余因子展開**）

$$\det(A) = a_{i1} \cdot a_{i1}^* + a_{i2} \cdot a_{i2}^* + \cdots + a_{in} \cdot a_{in}^*.$$

定理 13-1 の証明は文献 [1] を参照してください. $n = 3,\ j = 2$ の場合は資料の最後に載せました. 例を確認しておきます.

例題 13-2

$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の行列式を次の方法で計算せよ.

(1) 第 2 列に関する余因子展開　　(2) 第 3 行に関する余因子展開

[解答]

(1) $a_{12} = 7,\ a_{22} = 2,\ a_{32} = 5,\ a_{42} = 1$ であり, また

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 13,$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -18,$$

$$a_{32}^* = (-1)^{3+2}\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -23,$$

$$a_{42}^* = (-1)^{4+2}\det(A_{42}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 17.$$

よって

$$\det(A) = a_{12}a_{12}^* + a_{22}a_{22}^* + a_{32}a_{32}^* + a_{42}a_{42}^* = -43.$$

(2) $a_{31} = 1,\ a_{32} = 5,\ a_{33} = 3,\ a_{34} = -1$ であり，また

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1}\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -4,$$

$$a_{32}^* = (-1)^{3+2}\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} -23,$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3}\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 35,$$

$$a_{34}^* = (-1)^{3+4}\det(A_{34}) = -\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=} 29.$$

よって

$$\det(A) = a_{31}a_{31}^* + a_{32}a_{32}^* + a_{33}a_{33}^* + a_{34}a_{34}^* = -43.$$

□

問題 13-1　例題 13-2 の行列 A について第 1 行に関する余因子展開で行列式を計算せよ．

問題 13-2　行列 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$ の行列式を計算せよ．

定義 13-3 (余因子行列)

n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して, 行列 $\begin{bmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix}$ の転置行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix}$$

を A の**余因子行列**と呼ぶ.

※ つまり, $\tilde{A}$ の (i,j) 成分は a_{ji}^* である.

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ の余因子行列を計算してみます.

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = 4, \qquad a_{21}^* = (-1)^{2+1}\det(A_{21}) = -3,$$
$$a_{12}^* = (-1)^{1+2}\det(A_{12}) = -1, \qquad a_{22}^* = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = 2.$$

よって

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

余因子行列を求めて何が嬉しいのでしょうか? 実は, **A の余因子行列は「ほぼ」A の逆行列になっています**. 上の例で考えてみると,

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

となり, $A\tilde{A}$ は $\det(A)$ 倍の単位行列になります. これは一般の場合にも成り立ちます.

定理 13-2

n 次正方行列 A に対して,

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) E_n.$$

定理 13-2 の証明は文献 [1] 定理 3.4.1 を参照にしてください. $n = 3$ の場合は資料の最後に載せました.

前回, A が正則行列ならば $\det(A) \neq 0$ を示しました (例題 12-3). 定理 13-2 より, 実はこの逆も成立し, A が正則であることと $\det(A) \neq 0$ とは同値になります. なぜなら, $\det(A) \neq 0$ のとき, 定理 13-2 より

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} = E_n$$

となるからです.

定理 13-3

(1) A が正則行列 $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

(2) A が正則行列のとき, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\tilde{A})$.

例題 13-4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ が正則行列であることを示し, さらに逆行列 A^{-1} を求めよ.

[解答]

$\det(A) = -21 \neq 0$ より, 定理 13-3 から A は正則行列である.

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \qquad a_{21}^* = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1}\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2}\det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9,$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2}\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad a_{32}^* = (-1)^{3+2}\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$a_{13}^* = (-1)^{1+3}\det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad a_{23}^* = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3}\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

定理 13-3 より

$$A^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

問題 13-3 次の行列が正則行列かどうかを判定し, 正則である場合には逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

問題 13-4 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ が正則にならないような a を全て求めよ.

最後に定理 13-1, 13-2 の証明について触れておきます. 一般の場合はとても煩雑なので, ここでは $n = 3$ の場合に限定して証明をします.

定理 13-1 の証明 ($n = 3,\ j = 2$ の場合)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とすると,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

上式の最初のイコールは問題 11-2 (1) の列バージョンを用いた．ここで

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

であるので

$$\det(A) = (-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3\begin{vmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}\cdot(-1)^{2+1}\det(A_{12}) + a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\det(A_{22}) + a_{32}\cdot(-1)^{2+3}\det(A_{32})$$

$$= a_{12}\cdot a_{12}^* + a_{22}\cdot a_{22}^* + a_{32}\cdot a_{32}^*.$$

□

定理 13-2 の証明 ($n=3$ の場合)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}, \quad A\tilde{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

と置くと, 行列の積の定義より

$$c_{ij} = a_{i1}a_{j1}^* + a_{i2}a_{j2}^* + a_{i3}a_{j3}^*.$$

$i = j$ のとき, A の第 i 行に関する余因子展開より

$$c_{ii} = a_{i1}a_{i1}^* + a_{i2}a_{i2}^* + a_{i3}a_{i3}^* = \det(A) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$i \neq j$ のとき, 第 j 行以外は A と同じで, 第 j 行は A の第 i 行と同じ行列を B と置く．行列 B の i 行と j 行は等しいので, 問題 11-2 (2) の結果から $\det(B) = 0$. また

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

と置くとき,

$$b_{j1} = a_{i1},\ b_{j2} = a_{i2},\ b_{j3} = a_{i3} \qquad (\because\ B \text{ の第 } j \text{ 行は } A \text{ の第 } i \text{ 行と同じ})$$

$$B_{j1} = A_{j1},\ B_{j2} = A_{j2},\ B_{j3} = A_{j3} \qquad (\because\ A \text{ と } B \text{ は第 } j \text{ 行を取り除くと同じ})$$

に注意すると

$$c_{ij} = a_{i1}a^*_{j1} + a_{i2}a^*_{j2} + a_{i3}a^*_{j3} = b_{j1}b^*_{j1} + b_{j2}b^*_{j2} + b_{j3}b^*_{j3} = \det(B) = 0.$$

以上より, $A\tilde{A} = \det(A)E_n$ を得る. □

参考文献

[1] 三宅敏恒, 線形代数学, 培風館.