

## 線形代数 (第13回) の解答

### 問題 13-1 の解答

$a_{11} = 2, a_{12} = 7, a_{13} = 4, a_{14} = 1$  で, また

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{サラス}}{=} 6,$$

$$a_{12}^* = (-1)^{2+1} \det(A_{12}) = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{サラス}}{=} 13,$$

$$a_{13}^* = (-1)^{3+1} \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{サラス}}{=} -31,$$

$$a_{14}^* = (-1)^{4+1} \det(A_{14}) = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{サラス}}{=} -22.$$

よって

$$\det(A) = a_{11}a_{11}^* + a_{12}a_{12}^* + a_{13}a_{13}^* + a_{14}a_{14}^* = -43.$$

### 問題 13-2 の解答

$a_{11} = a, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{14} = b$  で, また

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3,$$

$$a_{14}^* = (-1)^{1+4} \det(A_{14}) = - \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -b^3.$$

第1行に関して余因子展開すると,

$$\det(A) = a_{11}a_{11}^* + a_{14}a_{14}^* = a^4 - b^4.$$

### 問題 13-3 の解答

$A$  について.  $\det(A) = 1 \neq 0$  であるので, 定理 13-3 より  $A$  は正則行列である.

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad a_{21}^* = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1} \det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a_{32}^* = (-1)^{3+2} \det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_{13}^* = (-1)^{1+3} \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad a_{23}^* = (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3} \det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

よって, 定理 13-3 より

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$B$  について.

$$\det(B) \stackrel{\text{サラス}}{=} 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 0 = 0.$$

定理 13-3 より  $B$  は正則ではない.

### 問題 13-4 の解答

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{\text{サラス}}{=} a^3 + 1 + 1 - a - a - a \\ &= a^3 - 3a + 2 \\ &= (a-1)^2(a+2). \end{aligned}$$

定理 13-3 より

$$A \text{ が正則ではない} \iff \det(A) = 0 \iff a = 1, -2.$$